



# DIPLOMA

PRIVATE STAATLICH ANERKANNTE HOCHSCHULE  
University of Applied Sciences

Namokel

## Elektrische und magnetische Felder

Studienheft Nr. 623

I. korr. Auflage 02/2016

## **Verfasser**

**Prof. Dr. Michael Namokel (Dipl.-Ing.)**

Studiendekan/Studiengangsleiter für den Fachbereich Technik an der DIPLOMA Hochschule

Leseprobe

© By DIPLOMA Private Hochschulgesellschaft mbH

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere das Recht der Vervielfältigung und Verbreitung sowie der Übersetzung und des Nachdrucks, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Kein Teil des Werkes darf in irgendeiner Form ohne schriftliche Genehmigung reproduziert oder unter Verwendung elektronischer Systeme verarbeitet, vervielfältigt oder verbreitet werden.

DIPLOMA Hochschule  
University of Applied Sciences  
Am Hegeberg 2  
37242 Bad Sooden-Allendorf  
Tel. 05652/587770, Fax 05652/5877729

# Elektrische und magnetische Felder

## Hinweise zum Arbeiten mit diesem Studienheft

Der **Inhalt** dieses Studienheftes unterscheidet sich von einem Lehrbuch dadurch, dass er **für das Selbststudium besonders aufgearbeitet** ist.

Die Bearbeitung eines Studienheftes beginnt in der Regel mit einer Information über den Inhalt des Lehrstoffes. Diese Auskunft gibt Ihnen das **Inhaltsverzeichnis**.

Dem Inhalt dieses Studienheftes bzw. größerer Lernabschnitte sind **Lernziele** vorangestellt. Sie dienen als Orientierungshilfe und ermöglichen Ihnen nach Durcharbeitung des Materials, Ihren eigenen Lernerfolg zu überprüfen.

Setzen Sie sich **aktiv** mit dem Text auseinander, indem Sie sich wichtiges und weniger wichtiges mit farbigen Stiften kennzeichnen. Betrachten Sie dieses Studienheft nicht als „schönes Buch“, das nicht verändert werden darf. Es ist ein **Arbeitsheft**, mit dem und in dem Sie arbeiten sollen.

Zur **schnelleren Orientierung** haben wir **Merksätze** bzw. **besonders wichtige Aussagen** durch Fettdruck und /oder Einzug hervorgehoben.

Lassen Sie sich nicht beunruhigen, wenn Sie Sachverhalte finden, die zunächst für Sie noch unverständlich sind. Diese Probleme sind bei einer ersten Begegnung mit einem neuen Stoff ganz normal.

Nach jedem größeren Lernabschnitt haben wir Übungsaufgaben, die mit „**SK = Selbstkontrolle**“ gekennzeichnet sind, eingearbeitet. Sie sollen der Vertiefung und Festigung der Lerninhalte und vor allem der Selbstkontrolle dienen.

Versuchen Sie, die ersten Aufgaben zu lösen bzw. die Fragen zu beantworten. Dabei werden Sie teilweise feststellen, dass das dazu erforderliche Wissen nach der ersten Durcharbeit des Lehrstoffes noch nicht vorhanden ist. Gehen Sie nun nochmals diesen Inhalten nach, d. h. durchsuchen Sie das Studienheft gezielt nach den erforderlichen Informationen.

Sofort während der Bearbeitung einer Frage sollten Sie die eigene Antwort schriftlich festhalten. Erst nach der vollständigen Beantwortung **vergleichen Sie Ihre Lösung mit dem** am Ende des Studienheftes **angegebenen Lösungsangebot**.

Stellen Sie dabei fest, dass Ihre eigene Antwort unvollständig oder sogar falsch ist, müssen Sie sich nochmals um die Aufgabe bemühen. Versuchen Sie, jedes Thema dieses Studienheftes zu verstehen. **Es bringt nichts, Wissenslücken durch Umblättern zu übergehen.**

In vielen Studienfächern baut der spätere Stoff auf vorhergehendem auf. Kleine Lücken in den Grundlagen verursachen deshalb große Lücken in den Anwendungen. Jedes Studienheft enthält **Literaturhinweise**.

Sie sollten diese Hinweise als ergänzende und vertiefende Literatur bei Bedarf zur Auseinandersetzung mit der jeweiligen Thematik betrachten. Finden Sie auch nach intensiver Durcharbeit keinen Weg zu befriedigenden Antworten auf Ihre Fragen, **geben Sie nicht auf**. In diesen Fällen

## Elektrische und magnetische Felder

**wenden Sie sich** schriftlich oder fernmündlich **an uns**. Wir stehen Ihnen mit Ratschlägen und fachlicher Anleitung stets zur Seite.

Wenn Sie **ohne Zeitdruck** studieren, sind Ihre Erfolge größer. Lassen Sie sich also nicht unter Zeitdruck setzen. **Pausen** sind wichtig für Ihren Lernfortschritt. Kein Mensch ist in der Lage, stundenlang ohne Pause konzentriert und nutzbringend zu arbeiten. Machen Sie also auch mal Pause! Es kann eine Kurzpause mit einer Tasse Kaffee sein, eventuell aber auch ein Spaziergang in frischer Luft, der Ihnen erst einmal wieder etwas Abstand von Ihren Studienthemen bringt.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Bearbeitung dieses Studienheftes.

Ihre

DIPLOMA  
Private Hochschulgesellschaft mbH

Leseprobe

# Elektrische und magnetische Felder

3.6.4 Kraftwirkung zwischen stromdurchflossenen Leitern	45
3.6.5 Drehmoment einer stromdurchflossenen Leiterschleife im homogenen Feld	47
3.6.6 Durchflutungsgesetz	48
3.6.7 Magnetfeld einer Spule	48
3.6.8 Materie im Magnetfeld	49
3.6.9 Hysterese	51
<b>3.7 Der magnetische Fluss und der magnetische Kreis</b>	<b>55</b>
3.7.1 Magnetischer Fluss	55
3.7.2 Magnetischer Kreis	57
3.7.3 Ersatzschaltungen	58
3.7.4 Gegenüberstellung mit dem Ohm'schen Gesetz	59
<b>4. Dynamische Betrachtung der Feldgrößen</b>	<b>61</b>
<b>4.1 Der Übergang von der Statik zur Dynamik</b>	<b>61</b>
<b>4.2 Lernziele</b>	<b>61</b>
<b>4.3 Induktionsvorgänge</b>	<b>62</b>
4.3.1 Grundlegende Zusammenhänge	62
4.3.2 Bewegungsinduktion	64
4.3.3 Transformatorinduktion	65
<b>4.4 Das Induktionsgesetz</b>	<b>66</b>
<b>4.4.1 Die Spannungsinduktion beim Generator</b>	<b>67</b>
4.4.2 Selbstinduktion - Induktivität	69
4.4.3 Gegeninduktion	71
<b>4.5 Die Energie im magnetischen Feld</b>	<b>72</b>
<b>4.6 Wirbelströme und Magnetisierungsverluste</b>	<b>73</b>
<b>4.7 Eine Einführung in den Verschiebungsstrom</b>	<b>75</b>
<b>5. Das System der Maxwell-Gleichungen</b>	<b>77</b>
<b>5.1 Vorbetrachtung und Lernziele</b>	<b>77</b>
<b>5.2 Ladungen als Quellen der Elektrischen Felder</b>	<b>77</b>
<b>5.3 Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes</b>	<b>78</b>
<b>5.4 Das Induktionsgesetz</b>	<b>78</b>
<b>5.5 Das erweiterte Durchflutungsgesetz</b>	<b>78</b>
<b>5.6 Die Materialgleichungen</b>	<b>79</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>98</b>
<b>Quellenverzeichnis und Literaturhinweise</b>	<b>100</b>

# Elektrische und magnetische Felder

## Glossar und Liste der verwendeten Formelbuchstaben

Das griechische Alphabet:

<i>A</i>	$\alpha$	Alpha
<i>B</i>	$\beta$	Beta
<i><math>\Gamma</math></i>	$\gamma$	Gamma
<i><math>\Delta</math></i>	$\delta$	Delta
<i>E</i>	$\varepsilon$	Epsilon
<i>Z</i>	$\zeta$	Zeta
<i>H</i>	$\eta$	Eta
$\Theta$	$\vartheta$	Theta
<i>I</i>	$\iota$	Jota
<i>K</i>	$\kappa$	Kappa
<i><math>\Lambda</math></i>	$\lambda$	Lambda
<i>M</i>	$\mu$	My (mue)
<i>N</i>	$\nu$	Ny (nue)
$\Xi$	$\xi$	Xi
<i>O</i>	$o$	Omikron
$\Pi$	$\pi$	Pi
<i>P</i>	$\rho$	Rho
$\Sigma$	$\sigma$	Sigma
<i>T</i>	$\tau$	Tau
<i>Y</i>	$\upsilon$	Ypsilon
$\Phi$	$\varphi$	Phi
<i>X</i>	$\chi$	Chi
$\Psi$	$\psi$	Psi
$\Omega$	$\omega$	Omega

Liste der Formelbuchstaben

Bezeichnung	Dimension	Erläuterung
<i>A</i>	$m^2$	Fläche in $m^2$
$\vec{B}$	$\frac{Vs}{m^2}$	Feldvektor der magnetischen Flussdichte (auch magnetische Induktion)
<i>C</i>	$\frac{As}{V}$	Kapazität, $1 \frac{As}{V} = 1F$ (Farad)
$\vec{D}$	$\frac{As}{m^2}$	Feldvektor der elektrischen Flussdichte (auch Verschiebungsdichte)
<i>e</i>	$A \cdot s$	Elementarladung $e = 1,602 \cdot 10^{-19} As$
$\vec{E}$	$V/m$	Feldvektor der elektrischen Feldstärke in Volt pro Meter
$\vec{F}$	<i>N</i>	Kraft in Newton

## Elektrische und magnetische Felder

$\epsilon_r$		Relative Permittivität (dimensionslos)
$\Theta$	$A$	Durchflutung in Ampere
$\kappa$	$\frac{m}{\Omega \cdot mm^2}$	Elektrische Leitfähigkeit; Kehrwert ist der spezifische Widerstand
$\lambda$	$\frac{As}{m}$	Linienladung mit Ladung pro Länge
$\mu_0$	$\frac{Vs}{Am}$	Permeabilität des freien Raumes mit $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am}$
$\mu_r$		Relative Permeabilität (dimensionslos)
$\rho$	$\frac{As}{m^3}$	Raumladungsdichte mit Ladung pro Volumen
$\sigma$	$\frac{As}{m^2}$	Flächenladung mit Ladung pro Fläche
$\varphi$	Grad	Eingeschlossener Winkel beim Kreuzprodukt sowie bei den Koordinatensystemen in der $x,y$ -Ebene
$\Phi$	$Vs$	Magnetischer Fluss in Voltsekunden mit $1Vs = 1Wb$ (Weber)
$\Delta\varphi$	$V$	Potentialdifferenz mit $\Delta\varphi = \varphi(1) - \varphi(2)$ , ergibt die Spannung $U_{12}$

# Elektrische und magnetische Felder

orientiert gehalten werden. Näheres zur benötigten Ingenieurmathematik kann auch aus der Literatur entnommen werden<sup>1</sup>.

Ziel dieses Kapitels ist es den Feldbegriff zu erlernen und die wichtigsten mathematischen Beschreibungen und Werkzeuge für den Umgang mit Feldern parat zu haben.

## 2.2 Skalarfelder und Vektorfelder

Allgemein reflektiert ein Feld einen bestimmten Wert (z.B. für eine bestimmte physikalische Eigenschaft) für jeden Punkt des Raumes. Dafür muss dieser Punkt eindeutig beschreibbar sein, was ein Koordinatensystem voraussetzt. Der Verlauf der Werte wird durch Funktionen der festgelegten Raumrichtungen beschrieben.

Zur Verdeutlichung zeigt Abbildung 1 ein Temperaturfeld in einem kartesischen Koordinatensystem, das durch die Achsen  $x$ ,  $y$  und  $z$  die Punkte im Raum erfasst. Jedem Punkt wird zusätzlich ein Wert zugewiesen. Das ist die Temperatur in diesem Koordinatenpunkt.

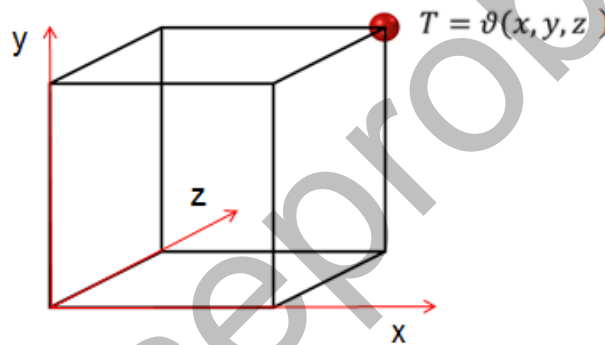


Abb. 1: Aufbau eines Temperaturfeldes

Jeder Punkt des Raumes weist also eine bestimmte Temperatur  $T = \vartheta(x, y, z)$  auf und die physikalische Eigenschaft der Temperatur kann durch Funktionen in Abhängigkeit von  $x$ ,  $y$  und  $z$  beschrieben werden. Das Feld der Temperatur beschreibt folglich die räumliche Verteilung der Temperatur, indem jeder Koordinate genau ein Wert zugewiesen wird bzw. berechnet werden kann.

Die alleinige Angabe eines Zahlenwertes (mit einer Einheit für physikalische Größen, vgl. SI-System in Heft 622) wird mathematisch als Skalar bezeichnet. Daher handelt es sich in Abbildung 1 um ein Skalarfeld, das jedem Raumpunkt einen Zahlenwert mit der Einheit Kelvin zuweist.

**Merke:** Ein Skalarfeld weist jedem Punkt des Raumes einen Zahlenwert zu. Dafür muss ein geeignetes Koordinatensystem und die Zahlenwerte für jeden Raumpunkt vorliegen bzw. durch einen funktionalen Zusammenhang beschrieben werden können.

<sup>1</sup> Lothar Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, 11. verbesserte und erweiterte Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, 2007



# Elektrische und magnetische Felder

Ausgangspunkt sind die bereits in Abbildung 1 und 2 verwendeten kartesischen Koordinatensysteme. Darüber hinaus finden oft auch Zylinderkoordinaten und Kugelkoordinaten Anwendung. Abbildung 10 zeigt wiederholend die Darstellung und die Zusammenhänge.

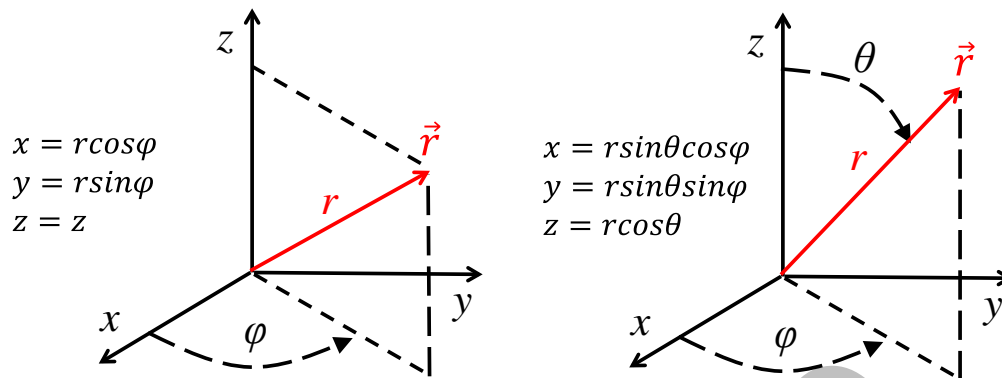


Abb. 10: Zylinder- und Kugelkoordinaten

## Übungsaufgaben zur Selbstkontrolle

**SK**

- K2.1 Was sind die Gemeinsamkeiten und Unterschiede von Skalar und Vektorfeldern?
- K2.2 Was stellen Feldlinien dar?
- K2.3 Wann wird ein Skalarprodukt bzw. Kreuzprodukt bei gegebenen Vektoren im Ergebnis Null und wann maximal? Welche Kernaussagen stehen hinter diesen Ergebnissen?
- K2.4 Wie wird die Quellenfreiheit bzw. die Zirkulationsfreiheit von Vektorfeldern festgestellt?
- Ü2.1 Skizzieren Sie eine Masse mit der Gewichtskraft  $F_G = m \cdot g$  im Gravitationsfeld der Erde. Leiten Sie den Zusammenhang für die Hubarbeit aus dem zugehörigen Linienintegral her.

### 3. Die statische Betrachtung der Feldgrößen

#### 3.1 Heranführung und Lernziele

Zur Beschreibung der elektromagnetischen Wirkungen (z.B. Kraftwirkung, Energiespeicherung) ist der Feldbegriff von zentraler Bedeutung. Ausgehend von den Ursachen des jeweiligen Feldes können die Wirkungen mit Interaktionspartnern dadurch beschrieben werden, dass nur die die Feldgröße am Ort des Interaktionspartners betrachtet wird. Hieraus ergeben und vereinfachen sich die Lösungsansätze vieler elektrotechnischer Problemstellungen.

Ziel dieses Kapitels ist es die grundlegenden Zusammenhänge rund um die elektrischen und magnetischen Feldgrößen praxisnah zu vermitteln, d.h. die Verdeutlichung der Zusammenhänge und Prinzipien stehen im Vordergrund. Die ausführliche (mathematische) Herleitung aller Zusammenhänge würde den Rahmen

# Elektrische und magnetische Felder

Die Linienladung hat also ein elektrisches Feld mit Komponenten in radialer Richtung und keine Feldkomponenten in tangentialer Richtung zum umgebenden Kreis mit Abstand  $r$ . Die Feldstärke nimmt hier mit  $1/r$  ab.

## 3.2.4 Elektrisches Feld einer Flächenladung

Im Sinne der bisherigen Ladungsbetrachtungen wird nun auf eine Fläche mit einer bestimmten Ladung je Flächeneinheit erweitert. Diese Flächenladung  $\sigma$  sie in einer Ebene liegend als unendlich weit ausgedehnt angenommen. Um nun den allgemeinen Ansatz nach Gleichung (3.5) mittels geschlossenem Volumenintegrals anwenden zu können, wird eine Integrationsbox mit der Fläche  $A$  auf beiden Seiten der Flächenladung angenommen. In Abbildung 15 wird das mit den Bereichen „Hinten“ und „Vorne“ gekennzeichnet.

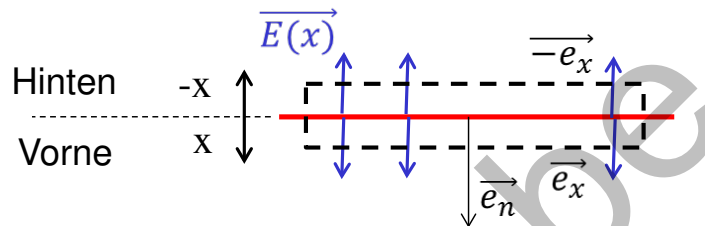


Abb. 15: Ansatz zur Bestimmung des elektrischen Feldes bei einer Flächenladung

Dem folgend muss das Hüllflächenintegral in Gleichung (3.5) nun in zwei Teilintegrale zerlegt werden:

$$\begin{aligned} \text{Vorne:} \quad & \iint_A E(x) \vec{e}_x \cdot \vec{e}_n dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \quad \rightarrow \quad E(x) \cdot A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \\ \text{Hinten:} \quad & \iint_A E(x) (-\vec{e}_x) \cdot (-\vec{e}_n) dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \quad \rightarrow \quad E(x) \cdot A = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \end{aligned} \quad (3.12)$$

Der geschlossene Umlauf „Vorne und Hinten“ bringt nun das Ergebnis:

$$\iint_{\partial V} 2 \cdot E(x) dA = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \cdot A \quad \rightarrow \quad E_x = \frac{\sigma}{2 \cdot \epsilon_0} \quad (3.13)$$

Damit liegt ein Feld vor, das unabhängig von  $x$  ist! Das elektrische Feld einer idealisierten (unendlich ausgedehnten) Flächenladung stellt sich damit im gesamten Raum als konstante Komponente normal zur Fläche der Flächenladung dar.

## 3.2.5 Superpositionsprinzip

Für diskrete Ladungsverteilungen erzeugt jede Ladung  $Q_i$  ein elektrisches Feld im Raum, das durch Gleichung (3.6) beschrieben werden kann. In Bezug auf einen bestimmten Punkt  $p_1$  im Raum überlagern sich die Feldkomponenten, gewichtet mit dem jeweiligen Abstandsquadrat und dem entsprechenden Richtungsvektor. Formal ergibt sich also eine ungestörte Superposition der Feldkomponenten zu

# Elektrische und magnetische Felder

**Merke:** Die freien Ladungen sind Quellen elektrischer Felder, deren Feldlinien von den positiven Ladungen ausgehend definiert sind. Prinzipiell ergibt sich für diskrete Ladungen ein Feld, dessen Betrag mit dem Abstandsquadrat abnimmt. Wird eine Ladung im elektrischen Feld bewegt, so sind die Vorgänge vergleichbar mit der Hubarbeit im Gravitationsfeld. Daraus definiert sich das elektrische Potential, wobei Potentialdifferenzen die elektrische Spannung darstellen. Für elektrische Felder existiert somit ein Potential, dessen Äquipotentialflächen die Feldlinien stets senkrecht schneiden und umgekehrt.

## Übungsaufgaben zur Selbstkontrolle

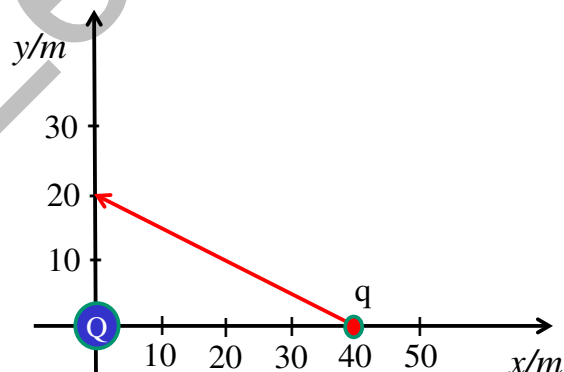
# SK

K3.2 Skizzieren Sie das elektrische Feld zwischen zwei sich anziehenden Punktladungen in der Ebene. Tragen Sie die Äquipotentiallinien ein und geben Sie die signifikanten Merkmale in den Verläufen an.

Ü3.2 Eine Zündkerze erhält von der Zündung eine Spannung von 20kV. Der Elektrodenabstand habe den typischen Wert von 1 mm.

- Skizzieren Sie die Anordnung
- Wie groß ist die Feldstärke, wenn das Feld als homogen angenommen wird?
- Für die Luft beträgt die Durchschlagfeldstärke 30kV/cm bei einer Gleichspannung. Ist eine sichere Zündung möglich?

Ü3.3 Gegeben ist eine Punktladung  $Q$  im Ursprung eines Koordinatensystems. Längs einer Bahn wird eine Ladung  $q = 1 \cdot 10^{-10} \text{As}$  bewegt und dabei die Arbeit  $W = 2 \cdot 10^{-10} \text{J}$  verrichtet. Wie groß ist die Punktladung  $Q$  in dieser Anordnung? Bei welchen Werten  $x$  und  $y$  wird keine Arbeit verrichtet?



## 3.3.3 Schaltungen mit Kondensatoren

Im vorherigen Abschnitt wurde bereits sichtbar, dass große Einzelkapazitäten nur begrenzt zu erzeugen sind. Daher stellt sich die Frage, wie die Auswirkungen von Schaltungen mit Kondensatoren sind. Für eine Parallelschaltung von Kondensatoren liegen alle Kondensatoren an der gleichen Spannung und es gilt

$$Q_{ges} = U \cdot \sum_{j=1}^n C_j \quad \text{mit} \quad C_{ges} = \sum_{j=1}^n C_j. \quad (3.25)$$

Bei der Parallelschaltung summieren sich daher die Einzelkapazitäten zur Gesamtkapazität. In einer Reihenschaltung addieren sich hingegen die Einspannungen  $U_j$  der Kondensatoren zu Gesamtspannung  $U$  und es folgt

$$U = \sum_{j=1}^n U_j = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} Q_j = Q \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad \text{mit} \quad \frac{1}{C_{ges}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{C_j} \quad (3.26)$$

Bei der Reihenschaltung von Kapazitäten addieren sich die Kehrwerte der Einzelkapazitäten zum Kehrwert der Gesamtkapazität. Die Ladung  $Q$  stellt sich bei der Reihenschaltung für alle Kapazitäten gleich ein mit  $Q_j = Q$ .

## 3.3.4 Elektrische Flussdichte

Es soll das folgende Experiment nach Abbildung 24 betrachtet werden: Ein leitendes Plattenpaar wird in ein elektrisches Feld eingebracht (senkrecht zum Feld), wobei es zunächst leitend verbunden ist (linkes Bild). Danach werden die Platten getrennt und aus dem Feld gezogen sowie die Ladung gemessen (rechtes Bild).

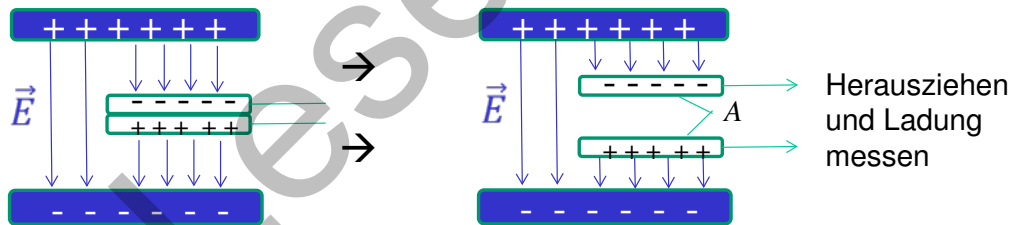


Abb. 24: Ladungstrennung durch Influenz

Durch das Experiment kann festgestellt werden, dass die influenzierte Ladung proportional zum elektrischen Feld  $\vec{E}$  und zur Fläche  $A$  der Leiterplatten ist. Daher gilt

$$Q_{infl} = \text{Konstante} \cdot E \cdot A. \quad (3.27)$$

Diese Beobachtung bestätigt sich in jedem beliebigen elektrischen Feld, wenn die Fläche  $A$  beliebig klein ist (geht in  $dA$  über) und senkrecht zum Feld verbleibt. Ist die Fläche  $A$  nun nicht senkrecht zum Feld, geht das Produkt  $E \cdot dA$  in das vektorielle Skalarprodukt über mit  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$  und es ergibt sich

$$dQ_{infl} = \text{Konstante} \cdot \vec{E} \cdot d\vec{A} = \vec{D} \cdot d\vec{A} \quad \text{mit} \quad \vec{D} = \frac{dQ_{infl}}{d\vec{A}}. \quad (3.28)$$

## Elektrische und magnetische Felder

Kontur herum, dann befinden sich die Tangentialkomponenten von  $\vec{E}$  in den jeweiligen Materialien. Folglich können die Tangentialkomponenten sich nur aufheben, wenn sie stetig also  $E_{t1} = E_{t2}$  gilt.

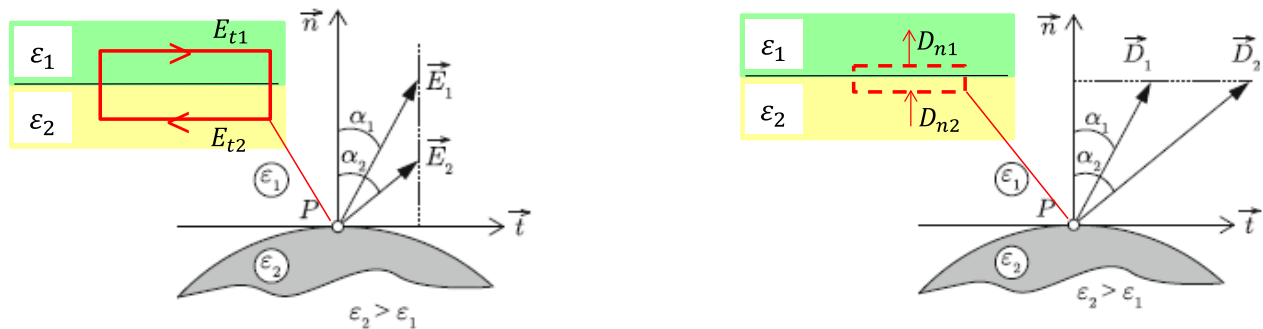


Abb. 27: Stetigkeit der Tangentialkomponente von  $\vec{E}$  und der Normalkomponente von  $\vec{D}$ ,  
Quelle: angelehnt an M. Marinescu, Elektrische und magnetische Felder, Springer Verlag, 2012, S. 43-44

**Merke:** Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke sind an der Grenzfläche von unterschiedlichen Dielektrika stetig, die Normalkomponenten unterliegen dem Brechungsgesetz.

Betrachtet man hingegen die elektrische Flussdichte  $\vec{D}$ , so muss sich nach Gleichung stets die eingeschlossene Ladung im Integral über die Hüllfläche (3.30) ergeben. Im rechten Bild der Abbildung 27 ist dazu vergrößert eine gedachte „Box“ um die Grenzfläche im Übergangspunkt herausgezeichnet worden. Da der Fluss stets über das Skalarprodukt in Richtung der Flächennormalen definiert ist, müssen die Normalkomponenten durch den „Boden“ und den „Deckel“ der „Box“ gleich groß sein, wenn keine zusätzliche Ladung auf der Grenzfläche enthalten ist. Es gilt daher stets  $D_{n1} = D_{n2}$ , wenn keine zusätzlichen Ladungen an der Grenzfläche auftreten.

**Merke:** Die Normalkomponenten der elektrischen Flussdichte sind an der Grenzfläche von unterschiedlichen Dielektrika stetig, die Tangentialkomponenten unterliegen dem Brechungsgesetz.

Aus der Materialgleichung  $\vec{D} = \varepsilon \cdot \vec{E}$  folgt dann

$$\varepsilon_1 \cdot E_{n1} = \varepsilon_2 \cdot E_{n2} \quad \text{und} \quad \frac{D_{t1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_2} \quad (3.33)$$

und das Brechungsgesetz für Feldlinien lautet mit den Bezeichnungen nach Abbildung 27

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} . \quad (3.34)$$

# Elektrische und magnetische Felder

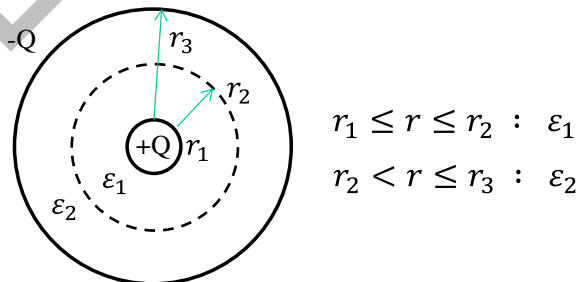
Dieses Ergebnis kann verallgemeinert werden<sup>3</sup> und die Energie im elektrischen Feld über das Volumenintegral der Energiedichten ausgewertet werden.

$$W_e = \iiint_V w_e dV = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{E} \cdot \vec{D} dV \quad \text{mit} \quad w_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}. \quad (3.37)$$

## Übungsaufgaben zur Selbstkontrolle

# SK

- K3.3: Verdeutlichen Sie die Materialgleichung im elektrischen Fall. Verwenden Sie dazu die Definition für die Spannung als Potentialdifferenz im elektrischen Feld und die allgemeine Definition für die Ladungen als Quellen elektrischer Felder. Was repräsentiert die Ladung hierbei?
- K3.4: Wieso steigt die Kapazität eines Kondensators beim Einbringen eines Dielektrikums an?
- K3.5: Erläutern Sie den Übergang von elektrischer Feldstärke und elektrischer Flussdichte. Welche Komponenten sind stetig und welche unterliegen dem Brechungsgesetz? Leiten Sie das Brechungsgesetz ab.
- Ü3.4: Gegeben ist ein Schichtkondensator mit 9 Lagen einer metallisierten Kunststoffolie. Die überdeckenden Flächen sollen 10mm x 10mm groß sein, die Dicke der Metallschicht soll 1µm sein und die Kunststoffolie habe die Dicke 2µm. Für die Kunststoffolie steht ferner in einem Datenblatt:  $\epsilon_r = 3$ ,  $E_D = 500kV/cm$
- Skizzieren Sie die Anordnung. Wie berechnet sich die Gesamtkapazität allgemein?
  - Wie groß ist die Gesamtkapazität des Kondensators
  - Wie groß ist die Betriebsspannung bei doppelter Sicherheit?
  - Wie viele Lagen sind notwendig, um die Kapazität 1µF aufzubauen?
- Ü3.5: Gegeben ist ein zylinderförmiger Kondensator. Es sind die Ladungen  $+Q$  auf dem Innenleiter und  $-Q$  auf dem Außenleiter vorhanden (Es wird ideale Leitfähigkeit der Leiter angenommen).



- Wie groß sind die Beträge der elektrischen Feldstärke und der elektrischen Flussdichte in den beiden Materialien mit  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ ?
- Wie groß muss  $r_2$  gewählt werden, damit die gespeicherte elektrische Energie in den Bereichen  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  gleich ist?

<sup>3</sup> Vgl. S. Paul, R. Paul: Grundlagen der Elektrotechnik und Elektronik 2, Springer, 2012, S. 428

## 3.6.3 Lorentzkraft

Ergänzend zum elektrischen Teil der Lorentzkraft  $\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$  nach Abschnitt 3.2.1 kommt nun der Fall für bewegte Ladungen in Magnetfeldern hinzu. Wird eine Ladung  $Q$  in einem Magnetfeld mit der Flussdichte  $\vec{B}$  mit der Geschwindigkeit  $\vec{v}$  bewegt, dann wird die Kraftwirkung über das Kreuzprodukt

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} \quad (3.54)$$

ausgedrückt. Es entsteht daher ein Kraftvektor  $\vec{F}$  der senkrecht zur Fläche steht, den  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  aufspannen. Abbildung 33 illustriert diese Kraftwirkung. Das Kreuzprodukt wurde anschaulich in Kapitel 1 erläutert, wobei deutlich wird, dass der Sinus des eingeschlossenen Winkels zwischen  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  die Größe der Kraft bestimmt. Damit ist die Kraft  $\vec{F}$  dann maximal, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  senkrecht aufeinander stehen bzw. dann minimal, wenn  $\vec{v}$  und  $\vec{B}$  parallel zueinander sind.

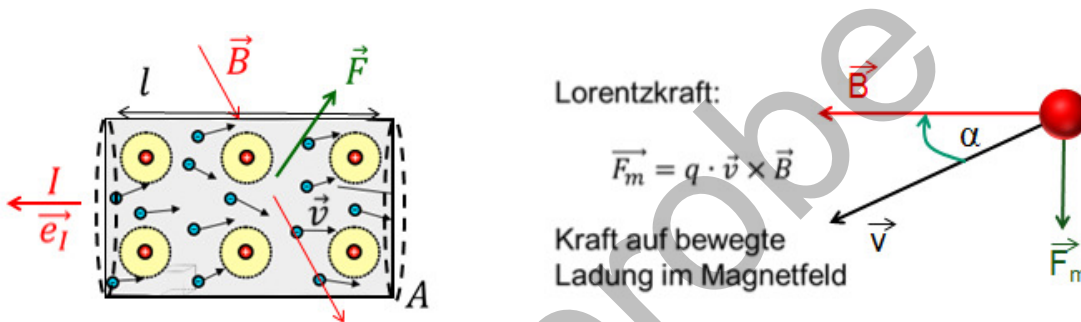


Abb. 33: Lorentz-Kraft für bewegte Ladungen in Magnetfeldern.

Die Lorentzkraft wirkt auch auf bewegte Elektronen in elektrischen Leitern (siehe Abbildung 33, linkes Bild). Folglich entsteht eine Kraft auf einen Stromdurchflossenen Leiter in einem Magnetfeld. Für einen langen, homogenen, geraden Leiter mit Querschnittsfläche  $A$  soll diese Kraftwirkung nun anschaulich abgeleitet werden. Dazu verdeutlicht die folgende Abbildung die Zusammenhänge.

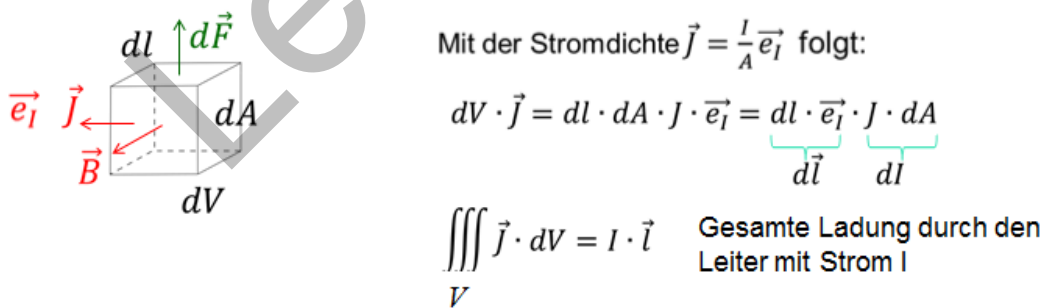
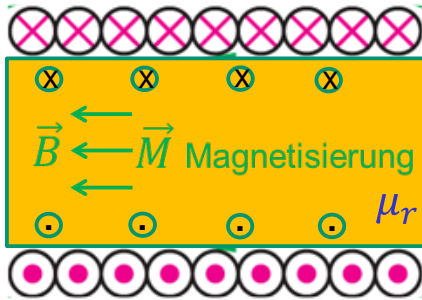


Abb. 34: Zur Erläuterung der Kraftwirkung auf stromdurchflossene Leiter in Magnetfeldern

Nimmt man ein Volumenelement  $dV = dA \cdot dl$  aus dem Leiterstück heraus, so strömt durch dieses eine Stromdichte  $\vec{j} = I/A \cdot \vec{e}_l$  mit der Stromrichtung  $\vec{e}_l$ . Dann kann geschrieben werden

$$dV \cdot \vec{j} = dl \cdot dA \cdot j \cdot \vec{e}_l = dl \cdot \vec{e}_l \cdot j \cdot dA = d\vec{l} \cdot dI, \quad (3.55)$$

# Elektrische und magnetische Felder



Im freien Raum gilt:

$$\vec{B} = \mu_0 \cdot \vec{H} \quad \text{mit} \quad [\vec{B}] = \frac{Vs}{m^2} = T \quad (\text{Tesla})$$

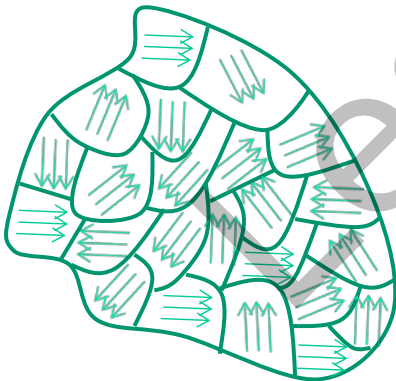
$$\mu_0 = 2\pi \cdot 10^{-7} = 1,257 \cdot 10^{-6} \frac{Vs}{Am} \quad \text{oder} \quad \frac{N}{A^2}$$

Abb. 40: Einfluss der Materie im Magnetfeld einer Spule

Die Größe von  $\mu_r$  ist materialabhängig von der Magnetisierungsfähigkeit als einheitenlose Größe gegeben. Dabei unterscheidet man 3 Gruppen der Magnetisierungsfähigkeit:

1. Diamagnetische Stoffe bei  $\mu_r < 1$  mit einem geringen negativen Effekt; z.B. bei Wismut, Kupfer, Silber
2. Paramagnetische Stoffe bei  $\mu_r \geq 1$  mit einem geringen positiven Effekt; z.B. Aluminium, Platin
3. Ferromagnetische Stoffe bei  $\mu_r \gg 1$  mit einem sehr stark positiven Effekt; z.B. Eisenkern

Ferromagnetische Stoffe haben sehr starke Momente auch ohne vorhandenes Magnetfeld. Die elementaren magnetischen Momente richten sich spontan zueinander aus und bilden kleine Bezirke, die auch Weißsche Bezirke genannt werden. Bei einer kritischen Temperatur hört die (spontane) Magnetisierung plötzlich auf. Diese Temperatur heißt der Couriepunkt. Abbildung 41 zeigt eine Grafische Zusammenfassung.



a) Weißsche Bezirke

Magnetwerkstoff	Couriepunkt in °C
Cobalt	1121
Eisen	768
Nickel	360
Ferrite (nach Zusammensetzung)	100...460

b) Couriepunkte einiger Materialien

Abb. 41: Weißsche Bezirke und Couriepunkte einiger Materialien



# Elektrische und magnetische Felder

**Merke:** Materie im Magnetfeld hat Auswirkungen auf die magnetische Flussdichte. Diese Auswirkung wird in der Materialgleichung  $\vec{B} = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \vec{H} = \mu \cdot \vec{H}$  durch die relative Permeabilität  $\mu_r$  beschrieben. Die Größe der Permeabilität hängt von den Magnetisierungs- eigenschaften des Materials ab. Ferromagnetische Stoffe haben dabei eine besondere Bedeutung, da diese sich durch sehr hohe Permeabilitäten ( $\mu_r$  im Bereich von ca. 100 bis ca. 500.000) aufweisen.

Nachfolgend sind noch einige Permeabilitätswerte in einer Tabelle zusammengefasst.

Medium	$\mu_r$	Einteilung
Supraleiter	0	ideal diamagnetisch
Blei, Zinn	< 1 (ca. 0,999...)	diamagnetisch
Kupfer	$0,9999936 = 1 - 6,4 \cdot 10^{-6}$	diamagnetisch
Wasserstoff	$1 - 2,061 \cdot 10^{-9}$	diamagnetisch
Vakuum	1	(neutral)
Polyethylen	$\sim 1$	(neutral)
Luft	$ca. 1 + 4 \cdot 10^{-7}$	paramagnetisch
Aluminium	$1 + 2,2 \cdot 10^{-5}$	paramagnetisch
Platin	$1 + 2,57 \cdot 10^{-4}$	paramagnetisch
Kobalt	80...200	ferromagnetisch
Eisen	300...10.000	ferromagnetisch
Ferrite	4...15.000	ferromagnetisch
Mumetall (NiFe)	50.000...140.000	ferromagnetisch
amorphe Metalle (ferromagnetisch)	700...500.000	ferromagnetisch
nanokristalline Metalle (ferromagnetisch)	20.000...150.000	ferromagnetisch

Abb. 42: Tabelle einiger Permeabilitätswerte für verschiedene Materialien

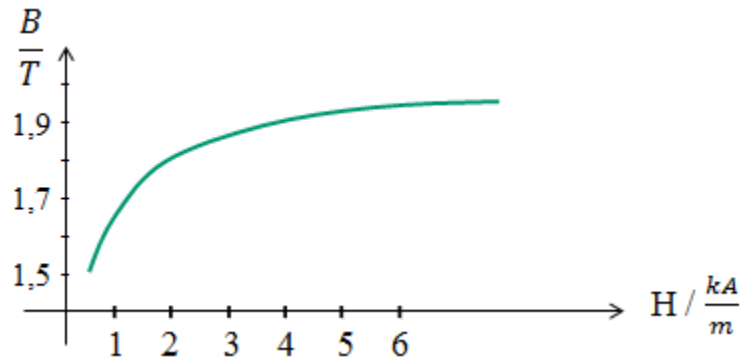
### 3.6.9 Hysterese

Die relative Permeabilität  $\mu_r$  nimmt für ferromagnetische Stoffe sehr große Werte an (Größenordnung bis  $10^5$ ) und daher verstärkt sich die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  entspricht bei gegebenem Magnetfeld  $\vec{H}$ . Man spricht daher auch von magnetischen Leitern, wenn eine hohe relative Permeabilität für ein Material vorliegt. Die magnetische Flussdichte  $\vec{B}$  steigt für solche Materialien aber nicht linear mit wachsender Feldstärke  $\vec{H}$  an. Vielmehr führt eine immer weiter ansteigende Feldstärke  $\vec{H}$  zu einer Sättigung in der Magnetisierung des Materials und ab einer bestimmten Feldstärke von  $\vec{H}$  steigt die magnetische Flussdichte nicht mehr an, d.h. die Sättigung der Magnetisierung und damit auch die der Flussdichte ist erreicht.

Ist das Material erst einmal magnetisiert, dann müssen die magnetischen Momente neu ausgerichtet werden, falls eine Ummagnetisierung gewünscht ist. Folglich wird eine entgegengesetzte Feldstärke notwendig, um diesen Prozess der Ummagnetisierung vorzunehmen. Abbildung 43 verdeutlicht den Magnetisie-

# Elektrische und magnetische Felder

Die folgende Magnetisierungskennlinie ist gegeben:



- c) Wie groß ist die magnetische Flussdichte mit Eisenkern und wie groß ist die relative Permeabilität?

## 3.7 Der magnetische Fluss und der magnetische Kreis

Im elektrischen Feld wurde für einen elektrischen Leiter eine Stromdichte  $\vec{j}$  und aus dem zugehörigen Integral  $\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I$  eine skalare Größe, der Strom  $I$  in Ampere, abgeleitet. Für eine geschlossene Hüllfläche treten im zeitunveränderlichen Fall immer genauso viele Stromanteile in diese Hüllfläche ein wie hinaus. Daher gilt  $\oiint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = 0$  und ein Stromfluss ist nur möglich, wenn der Stromkreis geschlossen ist. Für solche Gleichstromnetzwerke konnten mit Hilfe einfacher Regeln dann alle Größen im Kreis berechnet werden. Diese Vorgehensweise wird nun auf den magnetischen Fall übertragen.

### 3.7.1 Magnetischer Fluss

Äquivalent zum Flächenintegral  $\iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = I$  des Stromes wird der magnetische Fluss  $\Phi$  definiert zu

$$\Phi = \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} \quad \text{mit} \quad [\Phi] = Vs = Wb \text{ (Weber)} \quad (3.66)$$

Wie beim elektrischen Strom ein elektrischer Leiter notwendig ist, soll auch im magnetischen Fall ein magnetischer Leiter betrachtet werden (grundsätzlich reicht es aber aus, wenn eine Flussdichte  $\vec{B}$  durch eine beliebige Fläche  $A$  tritt). Letztere zeichnen sich durch  $\mu_r \gg 1$  aus, wodurch die Permeabilität die Funktion der elektrischen Leitfähigkeit übernimmt.

Für einen solchen magnetischen Fluss  $\Phi$  muss dann wieder gelten

$$\Phi = \oiint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = 0, \quad (3.67)$$

wenn eine geschlossene Hüllfläche um die Flussdichte  $\vec{B}$  erfasst wird. Also gilt, dass der Gesamtfluss aus der Flussdichte  $\vec{B}$  durch eine beliebige Hüllfläche stets gleich Null sein muss und somit Quellenfreiheit vorliegt. Daraus ergeben sich einige Schlussfolgerungen (vergleiche mit dem elektrischen Fall).

Tritt ein magnetischer Fluss durch einen magnetischen Leiter, dann bildet sich ein Strömungsfeld aus, das von der Geometrie des Leiters abhängt. Der Fluss muss, wie beim elektrischen Stromkreis, sich auf eine